Γραμμική Άλγεβρα II

26/09/2016

Υπενθύμιση προηγούμενου μαθήματος

- Ερμιτιανός χώρος $(V, <,>)$ είναι ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος

- Οι ιδιότητες του χώρου είναι οι εξής:

(i) $<\vec{\alpha},\vec{\beta}> = \overline{<\vec{\beta},\vec{\alpha}>}$

(ii) $<\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}> = <\vec{\alpha}_1,\vec{\beta}> + <\vec{\alpha}_2,\vec{\beta}>$

(iii) $<\lambda\vec{\alpha},\vec{\beta}> = \lambda<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$ αλλά $<\vec{\alpha},\lambda\vec{\beta}> = \overline{\lambda}<\vec{\alpha},\vec{\beta}>$

(iv) Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Rightarrow <\vec{\alpha},\vec{\alpha}> > 0$

- Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύει:

$$\langle (x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\rangle_{can} = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n$$

- Γενικά για το εσωτερικό γινόμενο στηλών ισχύει:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = X^t \cdot Y$$

όμως για τους μιγαδικούς αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με $X^t \cdot \overline{Y}$

- $A^* = \overline{A}^t$

- Ο πίνακας A λέγεται μοναδιαίος αν $A^* A = A \cdot A^* = I$.
- Οι στήλες (αλλά και οι γραμμές) ενός μοναδιαίου πίνακα είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ (αντίστοιχα του $\mathbb{C}^{1\times n}$)

- Ο πίνακας A ονομάζεται Ερμιτιανός αν $A^* = A$.
- Ο πίνακας A ονομάζεται κανονικός αν $A^* A = A A^*$

! Για όλους αυτούς τους πίνακες ισχύει το φασματικό θεώρημα και άρα είναι διαγωνίσιμοι.
Και άρα μπορώ να βρώ μία ορθοκανονική βάση του πίνα.

* * * * *

Ορισμός: Έστω V ένας Ερμιτιανός χώρος και $T: V \to V$ γραμμική απεικόνιση.
Η γραμμική απεικόνιση $T^*: V \to V$, που ορίζεται από τη σχέση $\langle T(\vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, T^*(\vec{b}) \rangle$, λέγεται προσαρτημένη της T (ή συζυγής της T).

↳ Στους
Ευκλείδειους χώρους
έχω τον αντίστοιχο ορισμό
αλλά δεν υπάρχει ο συζυγής
πίνακας

Πρόταση: Έστω $A = [T]_a^a$ όπου a ορθοκανονική βάση του V, τότε

$$A^* = [T^*]_a^a$$

↳ το αντίστοιχο ισχύει
και στον Ευκλείδειο χώρο.

Φυλλάδιο #8

Άσκηση 2 Βρείτε τα $x, y \in \mathbb{C}$: $A = \begin{pmatrix} 3i/5 & x \\ -4i/5 & y \end{pmatrix}$ να είναι μοναδιαίος.

Λύση:

$A^* \cdot A = I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3i}{5} & \frac{4i}{5} \\ \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3i/5 & x \\ -4i/5 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + \frac{16}{25} & -\frac{3i}{5}x + \frac{4i}{5}y \\ \frac{3i}{5}\bar{x} - \frac{4i}{5}\bar{y} & x\bar{x} + y\bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\bar{x} + y\bar{y} = 1. \\ -\frac{3i}{5}x + \frac{4i}{5}y = 0 \Rightarrow 4y = 3x \\ \frac{3i}{5}\bar{x} - \frac{4i}{5}\bar{y} = 0. \Rightarrow 4\bar{y} = 3\bar{x} \end{cases} \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\bar{x} + y\bar{y} = 1. \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 = 1. \Rightarrow |x|^2 + \left|\frac{3}{4}x\right|^2 = 1. \Rightarrow \frac{25}{16}|x|^2 = 1. \\ y = \frac{3}{4}x. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

Στους μιγαδικούς έχω άπειρους πίνακες με αυτήν την ιδιότητα, ένας από αυτούς είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 3i/5 & 4/5 \\ -\frac{4i}{5} & 3/5 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \rightarrow$

Άσκηση 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$: Βρείτε τις ιδιοτιμές και τον μοναδιαίο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ώστε $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος

Λύση: $\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & i \\ -i & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - (-i^2) = (1-x)^2 - 1 =$

$= (1-x-1)(1-x+1) = -x(-x+2) = x(x-2)$

Οι ιδιοτιμές είναι το 0 και το 2.

$$V_{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + ir_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + iy = 0$

$x = -it$ με $t \in \mathbb{C}$

$y = t$

$V_{(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

για να κάνω ένα διάνυσμα ορθοκανονικό διαιρώ με το $\|\ \|$ του, για να κάνω 2 και πάνω εφαρμόζω πρώτα Gram-Schmidt.

$$\left\| \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{-i(\overline{-i}) + 1\cdot\bar{1}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Επομένως $V_{(0)} = \left\langle \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1-2 & i \\ -i & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + i r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} x - iy = 0 \\ y = t \end{matrix} \Rightarrow x = it \quad \text{με } t \in \mathbb{C}. \quad \text{άρα } V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{i \cdot \bar{i} + 1 \cdot 1} = \sqrt{2}.$$

Άρα $V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P^* = P^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζω πως πρόκειται διαγώνιος πίνακας άρα θα είναι της μορφής $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 είναι το $\begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ άρα θα είναι

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{βάζω στην διαγώνιο } 0.$$

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι το $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ άρα στην διαγώνιο μπαίνει 2 : $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Άσκηση: 27

$$A=\begin{pmatrix}-2&4&3\\0&0&0\\-1&5&2\end{pmatrix},$$ ιδιοτιμές, ιδιοχώρους, $m_A(x)$, $A^{593}-2A^{15}+A=0$

Λύση:

$$\chi_A(x)=\det\begin{pmatrix}-2-x&4&3\\0&0-x&0\\-1&5&2-x\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-2-x&4&3\\0&-x&0\\-1&5&2-x\end{vmatrix}=$$

$$=-x\begin{vmatrix}-2-x&3\\-1&2-x\end{vmatrix}=-x(x-1)(x+1)$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $0,-1,1$

$$V(0)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}\;\middle|\;\begin{pmatrix}-2&4&3\\0&0&0\\-1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&4&3&0\\0&0&0&0\\-1&5&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-5&-2&0\\0&0&0&0\\2&-4&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-5&-2&0\\0&6&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

περίμενα να βρω μια μηδενική σειρά

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-5&-2&0\\0&1&1/6&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\quad\begin{cases}x-5y-2z=0\\ y+1/6z=0\\ z=t,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

άρα $x=5\left(-\frac{1}{6}t\right)+2t+\frac{7}{6}t$, $y=\frac{-1}{6}t$, $z=t$.

Επομένως $V(0)=\left\langle\begin{pmatrix}7/6\\-1/6\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2-1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{r} x-5y-z=0 \\ y=0 \\ z=t,\ t\in\mathbb{R}. \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=t. \end{array}$$

Επομένως $V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \;\middle|\; \begin{pmatrix} -2+1 & 4 & 3 \\ 0 & +1 & 0 \\ -1 & 5 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

άρα $\left.\begin{array}{r} x-4y-3z=0 \\ y=0 \\ z=t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=3t \\ y=0 \\ z=t. \end{array} \quad t\in\mathbb{R}.$

και άρα $V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Ο A είναι διαγωνίσιμος γιατί βρήκα 3 ιδιοτιμές και το $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.

$m_A(x)$?

Το ελάχιστο διαιρεί το χαρακτηριστικό, έχει τις ίδιες ρίζες και είναι μονικό:

$$m_A(x) = x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = x^3 - x$$

$A^{593} - 2A^{15} + A = 0$?

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0_{3\times3}$ και άρα προκύπτει και ότι $m_A(A) = 0_{3\times3}$.

$m_A(A) = 0_{3\times3} \Rightarrow A^3 - A = 0_{3\times3} \rightarrow A^3 = A$.
$A^4 = A^2$.
$A^5 = A^3 = A$.

Για πιο ακριβή απόδειξη κάνω επαγωγή!

$A^{593} - 2A^{15} + A = A - 2A + A = 2A - 2A = 0$.

άρα ισχύει η σχέση $A^{593} - 2A^{15} + A = 0$.

Άσκηση 19

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Βρίσκω τις ιδιοτιμές που πρέπει να είναι 3 και δείχνω ότι είναι θετικές ⇒ θετικά ορισμένος
ή
(ii) $x^t B x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^{3\times 1}, x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
ή (iii) Sylvester.

Έχουμε $4>0$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, άρα από το θεώρημα Sylvester ο πίνακας B δεν είναι θετικά ορισμένος.

Άσκηση 13 Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων $n\times n$ είναι ορθογώνιος.

A, B ορθογώνιοι
$A^t A = I_n$
$B^t B = I_n$.

Αρκεί νδο $(AB)^t (AB) = I$.

$$(AB)^t (AB) = B^t \underbrace{A^t \cdot A}_{I_n} \cdot B = B^t I_n B = B^t B = I_n$$

Άσκηση 25 Δύο όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Έστω A και B όμοιοι πίνακες ⇒ $B = P^{-1}AP$ με P αντιστρέψιμο
ή
$A = PBP^{-1}$

Πρέπει νδο $m_A(x) = m_B(x)$. (είναι πάντα μονικά)

$m_A(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$, $m_A(A) = A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_0 I_n = O_{n\times n}$

$(PBP^{-1})^m + a_{m-1}(PBP^{-1})^{m-1} + \dots + a_1(PBP^{-1}) + a_0 I_n = O_{n\times n}$ ⇒
⇒ $PB^mP^{-1} + a_{m-1}(PB^{m-1}P^{-1}) + \dots + a_1(PBP^{-1}) + a_0 (PI_nP^{-1}) = O_{n\times n}$
⇒ $P[B^m + a_{m-1}B^{m-1} + \dots + a_1 B + I_n]P^{-1} = O_{n\times n}$ (διώχνω τα P, P^{-1}).
$B^m + a_{m-1}B^{m-1} + \dots + a_1 B + I_n = O_{n\times n}$. Ο πίνακας

Ο πίνακας Β μηδενίζει το $m_A(x)$.

Άρα από θεώρημα, αν ένας πίνακας μηδενίζει ένα πολυώνυμο, τότε το ελάχιστο πολυώνυμό του διαιρεί αυτό το πολυώνυμο.

Άρα $m_B(x) \mid m_A(x)$.

Όμοια δείχνουμε και ότι $m_A(x) \mid m_B(x)$

$m_A(x), m_B(x)$ μονικά

άρα $m_A(x) = m_B(x)$.

Ασκηση 5

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (i) $B = A^t A$ συμμετρικός

Έχουμε: $B^t = (A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA = B$ επομένως B συμμετρικός και από το Φασματικό θεώρημα είναι διαγωνίσιμος.

(Νδο κάθε ιδιοτιμή του B είναι μη-αρνητική και ο B είναι θετικά ορισμένος ανν ο A είναι αντιστρέψιμος)

$X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. $\langle X, BX \rangle = X^t B X = X^t A^t A X \overset{*}{=} \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$

* [έχουμε $\langle X, BX \rangle = X^t \cdot BX$. άρα $\langle AX, AX \rangle = (AX)^t \cdot AX = X^tA^t \cdot AX$ ...]

Επίσης, γνωρίζω ότι ο B είναι μη-αρνητικός

($\Rightarrow$) θα δείξω ότι B θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ ιδιοτιμές του B θετικές $\Rightarrow$ $\det B$ είναι γινόμενο των ιδιοτιμών άρα $\det B \neq 0$.

$\det B = \det(A^tA) \neq 0 \Rightarrow \det(A^t) \cdot \det A \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμ

($\Leftarrow$) A αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \det A^t \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det B = \det(AA^t) \neq 0 \Rightarrow$ το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του B. Όμως όλες οι ιδιοτιμές του B είναι μη-αρνητικές
Άρα όλες οι ιδιοτιμές του B είναι θετικές $\Rightarrow$
$\Rightarrow B$ θετικά ορισμένος.

αν ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος τότε είναι συμμετρικός, το αντίστροφο δεν ξέρω αν ισχύει

Όταν βλέπω συμμετρικός πίνακας, έρχεται στο μυαλό μου το φασματικό $\Rightarrow$ διαγωνίσιμος. Επιπλέον σε κάθε διαγωνίσιμο πίνακα το ελάχιστο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους.

$\boxed{\text{Άσκηση : 6}}$: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός $\Rightarrow$ διαγωνίσιμος

Έστω ότι $\exists m>0$ τέτοιο ώστε $A^m = O_{n\times n}$.

Ν.δ.ο. $A = O_{n\times n}$.

Έχουμε $A^m = 0 \Rightarrow$ ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^m \Rightarrow$

$\Rightarrow m_A(x) / x^m \Rightarrow m_A(x) = x^s$ με $1 \leq s \leq m$

Όμως A διαγωνίσιμος οπότε το ελάχιστο έχει μόνο απλές ρίζες

Άρα $m_A(x) = x$

$m_A(A) = O_{n\times n} \Rightarrow A = O_{n\times n}$

$\rightarrow$ Βρείτε $B \neq O_{2\times 2}$, $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $B = B^t$ και $B^2 = O_{n\times m}$.

Έστω ότι $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = B^t \Rightarrow z = y$ άρα. $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix} = B^t$.

(γιατί B συμμετρικός)

$B^2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy+yw \\ yx+yw & y^2+w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x^2+y^2=0 \Rightarrow x=1$ και $y=i$

$xy+yw=0 \Rightarrow y(x+w)=0 \Rightarrow x=-w \Rightarrow w=-x=-1$.

$y^2+w^2=0$

Επομένως ο πιο απλός πίνακας είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

Άσκηση 11

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(α) 3 ιδιοτιμή του A , 15 ιδιοτιμή του $2A^2-3I_n$.

3 ιδιοτιμή του A $\Rightarrow \exists X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $X \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ τέτοιο ώστε

$AX = 3X$ ($AX = \lambda X$ με λ ιδιοτιμή , άρα $\lambda = 3$)

Αρκεί νδο :

$(2A^2-3I_n)\cdot X = 15X$ τότε το 15 θα είναι ιδιοτιμή του $2A^2-3I_n$.

$(2A^2-3I_n)X = 2A^2X - 3I_nX = 2A\cdot 3X - 3X = 6AX - 3X =$
$= 18X - 3X = 15X$.

$(2A^2-3I_n) = 15X$ άρα 15 ιδιοτιμή

(β) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^2 = 4I$, τι γνωρίζω για τα $m_A(x), \chi_A(x)$?

$A^2-4I_n = O_{n\times n}$, Άρα ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $x^2-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_A(x) \mid x^2-4 = (x-2)(x+2) \Rightarrow m_A(x) \in \{1, (x-2), (x+2), (x-2)(x+2)\}$

Παίρνω περιπτώσεις : όμως $m_A(x) \neq 1$ δεν μηδενίζεται από κανένα πολυώνυμο

(i) $m_A(x) = (x-2)$ (ii) $m_A(x) = (x+2)$ (iii) $m_A(x) = (x-2)(x+2)$.

Και στις 3 περιπτώσεις το ελάχιστο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους, άρα A διαγωνίσιμος. σε όλες τις περιπτώσεις.

$m_A(x) = x-2 \Rightarrow A-2I_n = 0 \Rightarrow A = 2I_n$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & & 0 \\ & 2-x & \\ 0 & & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^n = (-1)^n (x-2)^n.$$

Αν $m_A(x) = x+2 \Rightarrow A = -2I_n \Rightarrow \chi_A(x) = (-1)^n (x+2)^n$

Αν $m_A(x) = (x+2)(x-2)$

$$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot (x-2)^k (x+2)^\lambda$$

τότε $k+\lambda = n$ με $k, \lambda \geq 1$.